Matematyka
Lista 4

Zad 1. Na podstawie definicji wyznaczyć pochodną funkcji

$$a)\quad f(x) = 3x^2 - 2x, \qquad\qquad b)\quad f(x) = \sin(5x),$$

$$c)\quad f(x) = 2 - \sqrt{x}, \qquad\qquad d)\quad f(x) = \frac{1}{2x},$$

$$e)\quad f(x) = \frac{1}{2x-3}, \qquad\qquad f)\quad f(x) = \frac{2x+1}{3x-1},$$

$$g)\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad\qquad h)\quad f(x) = \cos(3x).$$

Zad 2. Stosując reguły różniczkowania obliczyć pochodne

$$a)\quad y = \frac{2x}{x+3}, \qquad b)\quad y = \frac{x^2-3}{x^2+3}, \qquad c)\quad y = x^2 \sin x, \qquad d)\quad y = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

$$e)\quad y = \operatorname{tg}\sqrt{x}, \qquad f)\quad y = x^2 \sin x, \qquad g)\quad y = \ln\frac{x^2}{1-x^2}$$

$$h)\quad y = (2\sqrt[3]{x^2} - x)(4\sqrt[3]{x^4} + 2\sqrt[3]{x^5} + x^2), \qquad i)\quad y = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{8}\sin^8 x,$$

$$j)\quad y = \sin^2 x + \sin x^2, \qquad k)\quad y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}, \qquad l)\quad y = e^{\sqrt{\ln(x^2+4)}},$$

$$m)\quad y = -x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}, \qquad n)\quad y = \frac{1+\operatorname{arctg} x}{1+x^2}.$$

Zad 3. Wyznaczyć pochodną drugiego rzędu funkcji

$$a)\quad f(x) = \frac{2x+1}{3x-3}, \qquad b)\quad f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^5}, \qquad c)\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{2x-3}},$$

$$d)\quad f(x) = \ln(x^2 - 2x + 1), \qquad e)\quad f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \qquad f)\quad f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}.$$

Zad 4. Wykazać, że dla każdego $n \in \mathbf{N}$ mamy

$$a)\quad (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \qquad b)\quad f(x) = (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$c)\quad (e^x)^{(n)} = e^x, \qquad d)\quad (\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}, \qquad e)\quad (x^{-1})^{(n)} n! x^{-(n+1)}.$$

Zad 5. Sprawdzić, że funkcja spełnia podane równanie różniczkowe:

a) $y = e^{4x} + 2e^{-x}$, $\qquad y''' - 13y' - 12y = 0$,

b) $y = \frac{x-3}{x+4}$, $\qquad 2(y')^2 = (y-1)y''$,

c) $y = \sqrt{2x - x^2}$, $\qquad y^3 y'' + 1 = 0$,

d) $y = \cos(e^x) + \sin(e^x)$, $\qquad y'' - y' + ye^{2x} = 0$.

Zad 6. Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji

$$a)\quad y=x^4-2x^2+5,\qquad b)\quad f(x)=5x+\sin x,\qquad c)\quad f(x)=2x^3-6x-18x+7,$$

$$d)\quad f(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x,\qquad e)\quad f(x)=\frac{x^3+x}{x^4-x^2+1},\qquad f)\quad f(x)=x^2\ln x,$$

$$g)\quad f(x)=x^2e^{\frac{-x^2}{2}},\qquad h)\quad f(x)=x^2\ln x,\qquad i)\quad f(x)=\cos x+x.$$

Zad 7. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji:

$$a)\quad f(x)=2x^3-3x^2,\qquad b)\quad f(x)=5x+\sin x,\qquad c)\quad f(x)=2x^3-6x-18x+7,$$

$$d)\quad f(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x,\qquad e)\quad f(x)=\frac{x^3+x}{x^4-x^2+1},\qquad f)\quad f(x)=x^2\ln x,$$

$$g)\quad f(x)=x^2e^{\frac{-x^2}{2}},\qquad h)\quad f(x)=x^2\ln x,\qquad i)\quad f(x)=\cos x+x.$$

Zad 8. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji:

a) $y=x^4-2x^2+5$, na przedziale $x\in[-2,2]$,

b) $y=x^5-5x^4+5x^3+1$, na przedziale $x\in[-1,2]$,

c) $y=\sqrt{100-x^2}$, na przedziale $x\in[-6,8]$,

d) $y=\frac{x-1}{x+1}$ na przedziale $x\in[0,4]$,

e) $y=\sqrt[3]{x^2}$, na $\mathbf{R}$

f) $y=\operatorname{arctg}(x^2)$ na $\mathbf{R}$.

Zad 9. Wyznaczyć przedziały wypukłości i wklęsłości oraz punkty przegięcia wykresów funkcji

$$a)\quad y=-x^4-2x^3+36x^2+x+5,\qquad b)\quad y=3x^5-5x^4+3x-2,$$

$$c)\quad y=\frac{x^3}{x^2+48},\qquad d)\quad y=1-\sqrt[3]{x-1},\qquad e)\quad y=e^{\operatorname{arctg} x},\qquad f)\quad y=\frac{1}{(x+1)^3},$$

$$g)\quad y=x^4(12\ln x-7),\qquad h)\quad y=\arcsin\frac{1}{x},\qquad i)\quad f(x)=x+2-\sqrt[3]{x^5}.$$

Zad 10. Wyznaczyć asymptoty wykresów funkcji

$$a)\quad y=\frac{3-x^2}{2-x},\qquad b)\quad y=\frac{2x^2-1}{x^2},\qquad c)\quad y=\frac{x^4}{2-x^3},$$

$$d)\quad y=\frac{2x^3}{(x-1)^2},\qquad e)\quad y=\frac{1}{x^2-5x+6},\qquad f)\quad y=e^{\frac{1}{x}}-x,$$

$$g)\quad y=x-2\operatorname{arctg} x,\qquad h)\quad y=x+3\operatorname{arcctg} x,\qquad i)\quad y=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4.$$

Zad 11. Przeprowadzić wszechstronne badanie funkcji i wykonać ich wykresy:

$$a)\quad y=\frac{x^2+1}{x^2},\qquad b)\quad y=\frac{1-x^3}{x^2},\qquad c)\quad y=\frac{x^3}{x+1},$$

$$d)\quad y=\frac{x^2}{x^2-1},\qquad e)\quad y=x\operatorname{arctg} x,\qquad f)\quad y=\frac{x}{e^x},$$

$$g)\quad y=\frac{e^x}{x},\qquad h)\quad y=\ln(x^2+1),\qquad i)\quad y=(x-3)\sqrt{x},$$

$$j)\quad y=\frac{\ln x}{x},\qquad k)\quad y=x-\ln(x+1),\qquad l)\quad y=x\frac{x-3}{x+1},$$

$$m)\quad y=\frac{\ln x}{x},\qquad n)\quad y=x-\ln(x+1),\qquad o)\quad y=(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}},$$

$$p)\quad y=x\frac{x-3}{x+1},\quad x\in[3,+\infty)\quad \textit{funkcja Törnquista trzeciego rodzaju}$$

$$r)\quad y=\frac{ax}{b+x},\quad x\in[0,+\infty),\ a,b>0\quad \textit{funkcja Törnquista pierwszego rodzaju}$$

$$s)\quad y=\frac{a}{1+be^{-cx}},\quad x\in[0,+\infty),\ a,b,c>0\quad \text{krzywa logistyczna}$$

$$t)\quad y=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad \text{funkcja gęstości rozkładu normalnego o wartości}$$

oczekiwanej μ i odchyleniu standardowym $\sigma>0$

$$u)\quad y=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}\quad \text{funkcja gęstości rozkładu Cauchy'ego}$$

Zad 12. Tendencję rozwojową popytu na produkt aktualnie wprowadzany na rynek opisuje funkcja f postaci:

$$f(t)=\frac{120}{1+54,6\,e^{-0,5t}},$$

gdzie t oznacza numer miesiąca, w którym rozpoczęła się sprzedaż danego produktu. Wyznaczyć taką wartość t_0, że dla $t<t_0$ ($t>t_0$) popyt rośnie coraz szybciej (wolniej). Sporządzić szkic wykresu funkcji f.

Zad 13. Przychód ze sprzedaży pewnego towaru zależy od wielkości sprzedaży x według wzoru:

$$f(x)=\frac{2x}{x+1},\qquad \text{gdzie } x\geq 0.$$

Wykazać, że w miarę wzrostu wielkości sprzedaży, przychód rośnie coraz wolniej.

Zad 14. Dochodowa funkcja popytu f na pewną grupę dóbr jest postaci

$$f(x)=\frac{50x-150}{x+3},\qquad \text{gdzie } x\geq 3.$$

Sprawdzić, że wraz ze wzrostem dochodu popyt jest coraz wolniejszy. Wyznaczyć również poziom nasycenia, czyli wartość, od której popyt nie przekroczy. Sporządzić szkic wykresu funkcji.

Zad 15. Funkcja:

$$x\ \mapsto\ \frac{x^2-3x}{x+1},\qquad \text{gdzie } x\in[3,+\infty),$$

jest dochodową funkcją popytu na pewną grupę dóbr. Wykazać, że wraz ze wzrostem dochodu popyt rośnie coraz szybciej.

Zad 16. Niech cenowa funkcja popytu f na pewną grupę dóbr ma postać

$$g(x)=\frac{2}{x+3},\qquad \text{gdzie } x\geq 0.$$

Wyznaczyć funkcję całkowitych wydatków i sprawdzić, czy funkcja ta rośnie coraz wolniej, gdy cena jest coraz wyższa.

Zad 17. Sprawdzić, że jeżeli dochodowa funkcja popytu jest potęgowa, tzn. $f(x) = AX^A$, gdzie $a \in \mathbf{R}$, $A > 0$ i $x > 0$, to elastyczność dochodowa jest dla każdego x taka sama i równa a.

Zad 18. Funkcja popytu na dobra podstawowe zależy od dochodu (na osobę) x i jest postaci

$$g(x) = \frac{2x}{x+2}, \qquad \text{gdzie } x \geq 0.$$

Obliczyć elastyczność dochodową funkcji f, gdy dochód na osobę x wynosi 2 jednostki pieniężne. Wynik zinterpretować ekonomicznie.

Zad 19. Wykazać, że jeżeli dochodowa funkcja popytu jest potęgowa, to elastyczność dochodowa rzędu n jest funkcją postaci $E^{(n)}$ postaci

$$E^{(n)}(x) = n! \binom{a}{n} x^{1-n}.$$

Obliczyć elastyczność czwartego rzędu, gdy dochód na osobę wynosi dwie jednostki pieniężne oraz $a = 1,2$.

Zad 20. Właściciel firmy produkującej pewne urządzenia zbadał, że koszty całkowite produkcji są funkcją f zależną od wielkości produkcji x w następujący sposób:

$$f(x) = 2000 + 10x - 0,2x^2 + 0,03x^3, \qquad \text{gdzie } x > 0.$$

Jaka jest w przybliżeniu wartość nakładów zużytych na wyprodukowanie dodatkowego urządzenia przy wielkości produkcji wynoszącej 100 sztuk?